

Title	一般収斂定理
Author(s)	泉, 信一
Citation	全国紙上数学談話会. 34 p.1-p.3
Issue Date	1935-03-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74026
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

104. 一般収斂定理

泉 信一

1. Bochner が彼ノ著書 "Fouriersche Integrale, 1933"ニ於テ次ノニツノ定理ヲ証明シタ。

定理1. 若シ (1°) $f(\xi)$ が $(-\infty, +\infty) =$ 於テ有界デ,
(2°) 点 $\xi = \chi =$ 於テ $f(\xi)$ が連続及ビ (3°) $|K(\xi)|$ が $(-\infty, +\infty)$
ニ於テ可積分ナラバ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\chi + \frac{\xi}{n}\right) K(\xi) d\xi = f(\chi) \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) d\xi \dots\dots (A)$$

定理2. 若シ (1°) $|f(\xi)|$ が $(-\infty, +\infty) =$ 於テ可積分, (2°)
点 $\xi = \chi =$ 於テ $f(\xi)$ が連続、(3°) $|K(\xi)|$ が $(-\infty, +\infty)$ デ可
積分, (4°) $K(\xi)$ が $(-\infty, +\infty)$ デ有界及ビ (5°) $|\xi| \rightarrow \infty$ ノト
キ $K(\xi) = O(|\xi|^{-1})$ トスルナラバ、(A) が成立スル。

本年一月ノ學士院記事デ、私が次ノ定理ヲ証明シマシタ。

定理3. 若シ (1°) $\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ 及ビ $\frac{|f(\xi)|^2}{1+|\xi|}$ が $(-\infty, +\infty) =$ 於
テ可積分, (2°) 点 $\xi = \chi =$ 於テ $f(\xi)$ が連続, (3°) $|K(\xi)|$ 及ビ
 $|\xi K^2(\xi)|$ が $(-\infty, +\infty) =$ 於テ可積分 ナラバ、(A) が成立ス
ル。

2. 定理3 ハ次ノ様ニ一般ニ出來ル。

定理4. 若シ (1°) $\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ 及ビ $\frac{|f^p(\xi)|}{1+|\xi|}$ ($p > 1$) が $(-\infty, +\infty)$
デ可積分, (2°) 点 $\xi = \chi =$ 於テ $f(\xi)$ が連続及ビ (3°) $|K(\xi)|$

及ビ $|\xi^{p-1} K^p(\xi)| < \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ が $(-\infty, +\infty)$ に於テ可積分ナラバ、(A)が成立スル。

コノ定理ヲ証明スルニハ、定理3ヲ証明スルトキニ用ヒタ Lemma 1 ト以下述ベル補助定理トヲ用ヒテ、定理3ト全ク同様ニヤレバヨイ。但シ Schwarz, 不等式ヲ用ヒタ所ヲ Hölder, 不等式ニカヘレバヨイ。

補助定理. 若シ $K^*(\xi)$ が $(-\infty, +\infty)$ に於テ L^q -class に属スルトキ

$$K_{\lambda}^*(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^*(\xi) \frac{\sin^2 \lambda(\xi - \eta)}{\lambda(\xi - \eta)^2} d\xi$$

トオクナラバ、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K^*(\xi) - K_{\lambda}^*(\xi)|^q d\xi = 0.$$

之レヲ証明スルニハ、 $K(\xi)$ が Step function, トキ特ニ

$$K(\xi) = 1, \quad \xi \in (a, b); \quad K(\xi) = 0, \quad \xi \notin (a, b)$$

ノ場合ヲ証明スレバヨイ。コノトキニハ $K_{\lambda}^*(\xi)$ が容易ニ計算出来ルカラ、容易ニ求ムル結果ヲ得ル。(詳細ハ Wiener, Fourier Integral and Certain of its applications, Lemma 79 ヲ参照)

3. 定理4ニ於テ $p \rightarrow 1$ 及ビ $p \rightarrow \infty$ ノ極限ノ場合ヲ考ヘル。 L^{∞} ハ通常ノ様ニ有界函數, class トスル。

先ヅ $p \rightarrow \infty$ トスルトキ、 $q \rightarrow 1$, $\frac{|f^p(\xi)|}{1+|\xi|}$ が $(-\infty, +\infty)$

$=$ 可積分ナコトハ $|f^p(e^x)|$ が $(0, \infty)$ デ可積分ナコトト同
 ジデアアル; 故ニ $f(\xi)$ ノ有界ナコトニナル。 $\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$,
 $(-\infty, +\infty)$ = 於テ可積分ナコトハ $f(\xi)$ ノ有界ナコトニヨッ
 テオキカヘラレルコトハ、"Lemma 1" カラ明カデアアル。
 又 $p \rightarrow 1$ ノトキ $\xi^{p-1} K^p(\xi) \rightarrow K(\xi)$ 、故ニ此ノ場合ニハ定
 理 1ヲ得ル。

次ニ $p \rightarrow 1$ ナラシメルトキ、定理 4ノ條件 (1°) ハ $\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$
 が $(-\infty, +\infty)$ = 於テ可積分ナコトニナル、 $|\xi^{p-1} K^p(\xi)|$ ノ
 $(-\infty, +\infty)$ = 於テ可積分ナコトハ $\{e^x K(e^x)\}^p$ が $(0, \infty)$ デ
 可積分ナコトデアアル。故ニ $p \rightarrow \infty$ ノトキハ、 $x K(x) = 0(1)$
 トナル。故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理 2'. 若シ (1°) $\frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ が $(-\infty, +\infty)$ = 於テ可積分、
 (2°) 点 $\xi = \chi$ = 於テ $f(\xi)$ が連続、 (3°) $K(\xi)$ が $(-\infty, +\infty)$
 = 於テ可積分、及ビ (4°) $K(\xi)$ が $(-\infty, +\infty)$ デ有界ナラバ
 (A) が成立スル。

i, 定理ハ果シテ成立スルダラウカ、之ハ定理 2ノ條件 (1°)
 が一般ニナリ、條件 (5°) が不用ニナツテアル。

4. 何レニセヨ、定理 4ハ定理 3ヲフクミ、定理 1及ビ 2
 ヲ (大体ニ於テ) 極限ノ場合ニモツコトニナル。